БЕЛОРУССКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2024. № 1. С. 50–61.
Belarusian Economic Journal. 2024. No 1. PP. 50–61.

ЭКОНОМИКА ПОТРЕБЛЕНИЯ

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ ЦЕН НА ПОЛЕЗНОСТЬ ПОТРЕБИТЕЛЯ

А.И. Астровский, М.П. Дымков, Н.В. Денисенко*

Аннотация. Описаны задачи оптимального потребления и оценки влияния изменений цен на полезность потребителя. На основе уравнений Слуцкого установлены взаимосвязи между показателями сравнительной статики, включая компенсационные характеристики. Представлен вычислительный эксперимент с целью анализа и оценки влияния цен на полезность потребителя (молодой семьи из трех человек) за период 2009–2016 гг. на основе функции полезности Бернулли (Стоуна–Джери). Рассчитаны компенсационные бюджеты по Слуцкому и Хиксу, а также значения индекса стоимости жизни по Конюсу.

Ключевые слова: функция полезности, потребительская корзина, задача оптимального потребления, компенсация по Слуцкому и Хиксу, индекс стоимости жизни по Конюсу.

JEL-классификация: C36, C61, D11, D12, D13.

DOI: 10.46782/1818-4510-2024-1-50-61

Материал поступил 8.01.2024 г.

Модели поведения потребителя, выбирающего наиболее предпочтительный для себя набор товаров (т. е. рационального потребителя), достаточно широко исследуются как с теоретической, так и с практической точки зрения (на основе анализа рынка товаров)[1] (Aleskerov, Bouyssou, Monjardet, 2007; Альсевич, Астровский, 2016; Байкин, Иванов, 2008; Горбунов, 2015; Дымков, 2014; Slutsky, 1915). В работе (Байкин, Иванов, 2008) приведены результаты исследования модифицированной (с учетом цены информации) модели потребительского выбора, полученные для некоторых видов функций полезности (линейной, Леонтьева, Кобба–Дугласа, Стоуна), что позволило оценить характер и степень влияния конъюнктурной информации на структуру и объемы потребления приобретаемых благ.

Будем считать, что определенный потребитель (или в некотором смысле однородная группа потребителей) располагает доходом, заданная часть которого расходуется на покупку товаров и услуг. Зная цены товаров и услуг, величину дохода и собственные предпочтения, потребитель приобретает некоторое количество каждого блага, формируя тем самым свой выбор с определенным уровнем полезности. В качестве основы для сопоставления различных потребностей в конце XIX в. экономисты применили понятие полезности, введенное английским философом И. Бентамом. Согласно ему максимизация полезности является руководящим психологическим принципом поведения людей. Категория полезности была взята на вооружение

[1] Астровский А.И. 2015. *Математическая экономика*. Ч 1. *Теория потребления*. Минск: БГЭУ; Астровский А.И., Альсевич В.В. 2015. К вопросу об интерпретации компенсированных показателей сравнительной статики в микроэкономической теории. *Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем*: сборник научных трудов IX Международной школы-симпозиума АМУР-2015. Симферополь: Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского. С. 12–17.

* **Астровский Анатолий Иванович** (aastrov53@gmail.com), доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0000-0001-5761-4415

Дымков Михаил Пахомович (dymkov_m@bseu.by), доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0000-0002-3467-2169

Денисенко Николай Васильевич (denisenko@gmail.com), кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь)

Для цитирования: Астровский А.И., Дымков М.П., Денисенко Н.В. 2024. Оценка влияния изменений цен на полезность потребителя. *Белорусский экономический журнал*. № 1. С. 50–61. DOI: 10.46782/1818-4510-2024-1-50-61

экономистами и легла в основу теории потребительского поведения, которая базируется на гипотезе о сопоставимости полезности набора различных товаров. Считается, что при заданных ценах потребители стремятся так распределить свои средства на покупку различных благ, чтобы максимизировать ожидаемое удовлетворение или суммарную полезность от их потребления. Таким образом, каждому набору товаров можно поставить в соответствие некоторое действительное число, определяющее полезность этого набора, т. е. на множестве наборов из n товаров

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

определена скалярная функция полезности $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В современных условиях быстрого изменения цен и доходов потребителей важно уметь оценивать изменения полезности потребителя при покупке наилучшего с его точки зрения набора товаров. Такие оценки можно сделать на основе показателей сравнительной статики, которые являются первыми частными производными функции спроса по ценам и доходу. Взаимосвязь различных показателей сравнительной статики выражается в виде дифференциальных уравнений в частных производных, которые были названы уравнениями Слуцкого. История этих уравнений изложена в Вэриан[2] и (Хикс, 1993; Chipman, Lenfant, 2002; Hicks, Allen, 1934).

Для экономического анализа состояния рынка потребительских товаров необходимо оценивать покупательную способность денег в условиях изменения цен товаров и объемов их потребления. Существует ряд подходов к определению индексов стоимости жизни и индексов потребительских цен, которые отличаются по степени агрегирования наборов товаров, по временной и пространственной локализации, по группам населения и т. д.

История экономических индексов (в частности, индексов потребительских цен) насчитывает более двухсот лет. Вначале внимание экономистов было обращено только к динамике цен, а объемы потребления товаров не учитывались (индексы Карли (1764), Джевонса (1865)). Основы современной теории экономических индексов, включающих цены и объемы благ, были заложены в конце XIX в. Индексы цен Ласпейреса (1871) и Пааше (1874), которые активно используются и в современной экономической науке, вычисляются на основе торговых статистик (p_s, x_s) и (p_t, x_t) для двух моментов времени s и t. Здесь p – вектор цен, а x – вектор объемов товаров. Оригинальный подход к построению индексов цен был предложен А.А. Конюсом (1924) на основе решения задачи оптимального потребления с использованием определенных типов функций полезности. Экономист ввел понятие истинного индекса стоимости жизни как отношения стоимостей двух наборов товаров, обеспечивающих при разных ценах одинаковый уровень полезности, представленный непрерывной дифференцируемой функцией (Конюс, Бюшгенс, 1926).

Часто покупательная способность денег определяется через понятие потребительской корзины. Потребительская корзина включает определенный набор благ, отражающий базовый потребительский стандарт конкретной страны для определенной социально-демографической группы населения. Расчет прожиточного минимума, как правило, определяется исходя из стоимости потребительской корзины в действующих ценах. Например, в Республике Беларусь выделяют группы населения, для которых задается номенклатура благ и количество их стандартного среднедушевого годового потребления. Покупательная способность денег означает стоимостную меру потребительской корзины при данных ценах. Отношение стоимостных мер потребительской корзины для двух определенных периодов времени определяет значение соответствующего индекса потребительских цен, на основании которого можно судить об изменениях покупательной способности денег на конкретном потребительском рынке. Итак, индексы цен – это относительные безразмерные показатели.

В данной работе на основе метода А.А. Конюса с использованием данных Национального статистического комитета Рес-

[2] Вэриан Х.Р. 1997. *Микроэкономика. Промежуточный уровень: современный подход.* Москва: ЮНИТИ. 767 с.

публики Беларусь по товарам продовольственной корзины и их средним ценам по годам (месяцам) с 2009 по 2016 г. проведены сравнительные расчеты изменения полезности потребителей из конкретной социально-демографической группы (молодой семьи из трех человек). В качестве функции полезности была использована логарифметическая функция Бернулли (ее также называют функцией Стоуна–Джери)[3] (Горбунов, 2015):

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(x_i - c_i)$$

относительно 42 переменных, описывающих состав продовольственной потребительской корзины. Параметры α_i и c_i рассматриваемой функции полезности определялись на основании данных о потребительской корзине для молодой семьи из трех человек.

Для полноты изложения рассмотрим основные постановки задач оптимального потребления и их решения, а также нахождение функций спроса Маршалла и Хикса исходя из задач оптимального потребления и минимизации расходов. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые функции обладают требуемыми свойствами.

Основная задача теории потребления и ее решение. Функции спроса Маршалла

Одной из основных проблем теории потребления является задача определения таких наборов товаров, которые при заданных ценах и доходе потребителя доставляют максимум суммарной полезности. Задачу оптимального потребления можно записать в виде задачи нелинейного программирования с бюджетным ограничением

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \tag{1}$$

$$p'x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n \le M, \quad x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набор из n товаров;

$p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – заданный вектор цен на товары;

M – заданный бюджет потребителя;

$u(x)$ – функция полезности потребителя.

[3] Астровский А.И. 2015. *Математическая экономика*. Ч. 1. *Теория потребления*. Минск: БГЭУ. 168 с.

В дальнейшем знаки $=, \le, \ge$ для двух векторов одинаковой размерности означают покомпонентные соотношения, все векторы понимаются как вектор-столбцы, **ʹ** (штрих) означает операцию транспонирования. Функцию полезности $u(x)$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемой по всем компонентам и вогнутой (иногда для упрощения выкладок – строго вогнутой). Без потери общности предполагаем, что потребитель обязательно закупает весь набор товаров, т. е. $x_i^0 > 0,\ i = \overline{1, n}$. Это исключает граничные точки вида $x_i^0 = 0$ допустимого множества потребителя

$$\mathbb{B}(p, M) = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}_+^n : p'x \le M \right\}.$$

Нахождение решения задачи выпуклого программирования (1), (2) основано на изучении функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(M - p'x),$$

где λ – множитель Лагранжа.

При сделанных предположениях из теории выпуклого программирования следует, что если $x^0 > 0$ – оптимальный набор товаров, то согласно теореме Куна–Таккера, существует множитель Лагранжа $\lambda^0 > 0$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, такой, что выполняются условия:

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} - \lambda^0 p_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$p'x^0 = M. \tag{4}$$

С помощью понятия предельной полезности i-го товара соотношение (3) можно представить в виде

$$\frac{\partial u(x^0)}{p_i \partial x_i} \equiv \lambda^0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. отношение предельной полезности i-го товара к его цене постоянно на оптимальном наборе товаров.

Если погрузить задачу оптимального потребления (1), (2) в семейство параметрических задач, зависящих от цен p и бюджета M, то для каждой фиксированной пары (p, M) в силу строгой вогнутости функции полезности $u(x)$ решение задачи (1), (2) будет единственно, и оно определяет функцию оптимального спроса потребителя

$$x^*(p,M) = \left(x_1^*(p,M), x_2^*(p,M), \ldots, x_n^*(p,M)\right).$$

Далее эту функцию $x^*(p, M)$ будем называть функцией спроса по Маршаллу, или маршаллианским спросом. Функцию

$$v^0 = v^0(p, M) = u(x^*(p, M))$$

называют неявной функцией полезности, которая непосредственно по вектору цен p и доходу M потребителя определяет его оптимальную полезность.

Показатели сравнительной статики теории потребления (а это первые частные производные функций спроса $x^*(p, M)$ и предельной полезности денег $\lambda^*(p, M)$) по ценам и доходу

$$\partial x_i^* / \partial p_j, \quad \partial x_i^* / \partial M, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\partial \lambda^* / \partial p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \partial \lambda^* / \partial M \tag{5}$$

полностью характеризуют динамику изменения оптимального набора товаров при изменении цен товаров и бюджета потребителя.

Помимо показателей (5), в экономической литературе рассматривают так называемые компенсированные (или компенсационные) показатели. Их определение связано с различной интерпретацией эффектов дохода и замены по Слуцкому и Хиксу. Компенсационные показатели находятся не через решения параметрической задачи (1), (2), а исходя из соотношений (3), (4), которые являются тождествами в некоторой окрестности заданных значений p, M. Отметим, что в источниках (Aleskerov, Bouyssou, Monjardet, 2007; Горбунов, 2015; Slutsky, 1915) приведены формулы вычисления указанных показателей без использования основного матричного уравнения теории потребления.

Задача минимизации расходов потребителей. Хиксианский спрос

Наряду с задачей (1), (2), рассмотрим задачу минимизации расходов потребителя при уровне полезности не ниже заданной

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \to \min, \tag{6}$$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \bar{u}, \ x \geq 0, \tag{7}$$

в которой известны вектор цен p, функция полезности $u(x)$. Уровень полезности $\bar{u}$ (благосостояния) потребителя определяется через некоторый набор товаров $\bar{x}$ (например, потребительскую корзину) $\bar{u} = u(\bar{x})$. Задачу (6), (7) можно интерпретировать как задачу определения минимального бюджета M^* и набора товаров x^*, обеспечивающего этот минимум ($M^* = p'x^*$) при известных ценах p для достижения полезности не ниже указанного уровня $\bar{u}$.

Задача (6), (7) является задачей выпуклого программирования, для которой функция Лагранжа имеет вид:

$$F(x, \mu) = p'x + \mu(\bar{u} - u(x)).$$

Пусть x^* – решение задачи (6), (7). Считаем, что все товары закупаются, поэтому $x^* > 0$, вектор цен $p > 0$, $u(x)$ – строго вогнутая функция. Согласно теореме Куна–Таккера найдется множитель Лагранжа $\mu^* > 0$ такой, что

$$\frac{\partial F(x^*, \mu^*)}{\partial x_i} = p_i - \mu^* \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

$$u(x^*) = \bar{u}. \tag{9}$$

Равенства (8) можно представить в виде:

$$\frac{\partial u(x^*)}{p_i \partial x_i} \equiv \frac{1}{\mu^*}, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Если погрузить задачу (6), (7) в семейство задач, зависящих от параметров p, $\bar{x}$, то решение $x^H(p, \bar{x})$ этого семейства задач называют хиксианским спросом (или функцией спроса по Хиксу). Функцию

$$e(p, \bar{x}) = p' x^H(p, \bar{x})$$

называют неявной функцией расходов.

Отметим, что если $\bar{x} \in \{x \in \mathbb{R}_+^n : u(x) = u(x^*(p, M))\}$, то $M^* = M$, $x^H(p, \bar{x}) = x^*(p, M)$, $\lambda^0 = 1/\mu^*$, т. е. справедливы тождества взаимности:

$$u^0(p,e(p,\bar{x})) \equiv u(\bar{x}),\ e(p,x^*(p,M)) \equiv M,$$
$$x^H(p,x^*(p,M)) \equiv x^*(p,M),$$
$$x^*(p,\ e(p,x^*)) \equiv x^H(p,x^*).$$

Уравнения Слуцкого

Для нахождения зависимости между показателями сравнительной статики Е.Е. Слуцким и Дж. Хиксом (вполне вероятно независимо друг от друга) получены уравнения, которые Дж. Хикс назвал уравнениями Слуцкого.

Рассмотрим семейство задач вида (1), (2), решения которых $x^* = x^*(p, M)$ представляют собой n-вектор-функцию спроса Маршалла. Величины (показатели сравнительной статики)

$$\partial x_i^* / \partial p_j, \quad \partial x_i^* / \partial M,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

при фиксированных p, M показывают, как меняется спрос на i-й товар при изменении соответственно цены на j-й товар или бюджета M.

Рассмотрим компенсационные показатели

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{co},\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Сначала определим эти показатели исходя из интерпретации Дж. Хикса. Обозначим их в этой интерпретации следующим образом: $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{co(H)}$. Пусть $\bar{p}$ – измененный вектор цен. Согласно Дж. Хиксу, показатели $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{co(H)}$ должны показывать изменение спроса на i-й товар при изменении цены на j-й товар при такой компенсации бюджета $\overline{M}$, при котором полезность нового оптимального набора товаров $x^*(\bar{p}, \overline{M})$ такая же, как и набора $x^* = (p, M)$, т. е.

$$u(x^*(\bar{p}, \bar{M})) = u(x^*(p, M)). \tag{11}$$

Исходя из этого определения, бюджет является функцией цен: $M = M\ (p)$. Следовательно, $x^* = x^*(p, M(p))$. А это означает, что $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{co(H)}$ есть полная производная по p_j от x_j^*, т. е.

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{co(H)} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*}{\partial M}\left(\frac{\partial M}{\partial p_j}\right)_{co(H)},\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{co(H)} = \frac{\partial x^*}{\partial p} + \frac{\partial x^*}{\partial M}\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)'_{co(H)}. \tag{12}$$

Здесь индекс (H) использован для того, чтобы подчеркнуть изменение бюджета по Дж. Хиксу. Определим $(\partial M / \partial p)_{co(H)}$. Согласно тождеству (11) получим:

$$\left(\frac{\partial u(x^*(p,M))}{\partial x}\right)'\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{co(H)} = 0. \tag{13}$$

Поскольку оптимальный маршаллианский спрос $x^* = x^*(p, M)$ и соответствующий множитель Лагранжа $\lambda^* = \lambda^*(p, M)$ удовлетворяют тождественно соотношениям (3), (4) в некоторой окрестности заданных значений p, M, то в силу (3) и с учетом, что $\lambda^* > 0$, из (13) будем иметь:

$$p'\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{co(H)} = 0. \tag{14}$$

Далее, дифференцируя тождество (4), в котором $x^0 = x^*(p, M(p))$, по p получим

$$x^{*\prime} + p'\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{co(H)} = \left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)'_{co(H)},$$

откуда в силу (14) следует равенство

$$\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{co(H)} = x^*. \tag{15}$$

Подставив соотношение (15) в выражение (12), окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{co(H)} - \frac{\partial x^*}{\partial M}x^{*\prime}, \tag{16}$$

которое и является уравнением Слуцкого в дифференциальной матричной форме. Как видим, его доказательство простое и не использует матричного уравнения теории потребления[4] (Горбунов, 2015), которое достаточно громоздкое. Для вычисления остальных показателей сравнительной статики применяются такие же простые вычисления.

Геометрическая интерпретация дискретного варианта уравнения Слуцкого для двух товаров, как правило, дается по Дж. Хиксу без дополнительных пояснений, что иногда проводит к неправильным интерпретациям уравнения.

По Слуцкому компенсационные показатели предполагают такое изменение бюджета M в ответ на изменение цен, при котором оптимальный набор товаров остается прежним, другими словами, должно выполняться тождество

$$\bar{p}' x^*(p,M) \equiv \bar{M}, \quad \bar{M} = M(\bar{p}) , \qquad (17)$$

Обозначим эти показатели через $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{co(S)}$. Заметим, что при $\bar{p}, \bar{M}$ спрос $x(\bar{p}, \bar{M})$ уже не будет оптимальным. Поскольку $M = M(p)$, то для рассматриваемых величин также будет справедливо равенство (12) с заменой индекса H на индекс S. Поэтому величину $(\partial M / \partial p)_{co(S)}$ следует искать не из тождества (11), а из (17). Предполагая в тождестве (17) цены $p_k, k = 1, 2, \ldots, n, \ k \neq j$ неизменными, а изменяющейся только цену p_j, получим $(\bar{p}_j - p_j) x_j^*(p,M) \equiv M(\bar{p}) - M$, откуда следует:

$$x_j^*(p,M) \equiv \frac{M(\bar{p}) - M}{\bar{p}_j - p_j}. \qquad (18)$$

Перейдя к пределу в тождестве (18) при $\bar{p}_j \to p_j$, получим $x_j^*(p,M) = (\partial M / \partial p_j)_{co(S)}$. Последнее равенство в векторной форме аналогично равенству (15). Подставляя в (12) это выражение, получим:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{co(S)} - \frac{\partial x^*}{\partial M} x^{*\prime}. \qquad (19)$$

Уравнение (19) совпадает с уравнением (16). Хотя первые слагаемые справа в (16) и (19) равны между собой (индексы H и S можно опустить), они имеют различный смысл в дискретной геометрической интерпретации по Слуцкому и Хиксу. Заметим, что и вторые слагаемые справа в уравнении Слуцкого в дискретном варианте также имеют различный смысл, поскольку вычисления $\partial M / \partial p$ проводились исходя из разных предпосылок. Поэтому при интерпретации компенсированных показателей целесообразно упоминать как предположения Слуцкого, так и Хикса.

Левая часть уравнения Слуцкого представляет общий эффект от изменения цен, первое слагаемое справа – эффект замещения, второе со знаком «минус» – эффект дохода. В дискретной форме эти уравнения можно записать следующим образом:

$\Delta x^*_{(p)} = [\Delta x^*_{(p)}]_{co(H)} - [\Delta x^*_{(M)}]_{co(H)}$ (по Хиксу),

$\Delta x^*_{(p)} = [\Delta x^*_{(p)}]_{co(S)} - [\Delta x^*_{(M)}]_{co(S)}$ (по Слуцкому).

Вычислительный эксперимент с оценкой влияния изменения цен на полезность потребителя

Расходы на продукты питания являются частью потребительских расходов домашних хозяйств. Домашнее хозяйство – это человек или группа людей, которые живут совместно, обеспечивают себя необходимыми для жизни благами и полностью или частично объединяют свои средства.

В данном вычислительном эксперименте рассмотрено домашнее хозяйство – молодая семья из трех человек, для которой Министерством труда и социальной защиты Республики Беларусь утвержден состав и объем потребительской продуктовой корзины[5]. Потребительская корзина – это примерный расчетный набор, характеризующий типичный уровень и структуру месячного (годового) потребления определенной социально-демографи-

[4] Астровский А.И. 2015. *Математическая экономика.* Ч. 1. *Теория потребления.* Минск: БГЭУ.

[5] URL: https://pravo.by/document/?guid=12551&p0=W22035031

ческой группы. Потребительская корзина служит базой сравнения расчетных и реальных уровней потребления, а также основой для определения покупательной способности валют. Согласно другому определению, потребительская корзина – «необходимые для сохранения здоровья человека и обеспечения его жизнедеятельности минимальный набор продуктов питания, а также непродовольственные товары и услуги, стоимость которых определяется в соотношении со стоимостью минимального набора продуктов питания».[6]

Для оценки полезности потребителя (домашнего хозяйства) в зависимости от приобретенного набора продуктов питания будем использовать функцию полезности Бернулли

$$u(x)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln(x_i-c_i).$$

Коэффициенты рассматриваемой функции полезности определим исходя из цен продуктов p_i, $i = 1, 2, ..., 42$ и их месячных объемов в продуктовой корзине $x_i^K, i=1,2,\ldots,42$ следующим образом:

$$\alpha_i=\frac{x_i^K p_i}{\sum_{j=1}^{42}x_j^K p_j},\ i=1,2,\ldots,42,\qquad \sum_{j=1}^{42}\alpha_j=1,$$

а минимальный объем потребления c_i возьмем, например, как десятую часть от $x_i^K, i=1,2,\ldots,42.$

Здесь и далее информация о составе, объеме товаров и ценах на них (по месяцам) из потребительской корзины приведена согласно данным Национального статистического комитета Республики Беларусь[7].

В табл. 1 приведены состав продуктовой корзины и объемы (в натуральных единицах измерения) годового потребления продуктов питания для молодой семьи из трех человек, а также вычисленные параметры $\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,42$ функции полезности для этой семьи. В качестве цен для вычислений параметров $\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,42$ взяты цены базового 2009 г.

Ниже приведены результаты вычислений, выполненных с помощью системы Mathcad. В качестве месячного продовольственного бюджета потребителя (т. е. молодой семьи из трех человек) взято 2 000 000 бел. руб. без учета компенсации бюджета потребителя.

На рис. 1 представлено изменение по годам (с 2009 по 2016 г.) на январь месяц оптимальной полезности, рассчитанной по задаче оптимального потребления (1), (2) с функцией полезности Бернулли

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{42}\alpha_i\ln(x_i-c_i)$$

и коэффициентами $\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,42$ из табл. 1.

Отметим, что оптимальная полезность для рассматриваемого потребителя в январе 2009 г. была 27,43 условных единиц, а в январе 2016 г. – 6,47.

Изменения по годам (2009–2016 гг.) на август месяц оптимальной полезности указанного потребителя при тех же условиях (как на рис. 1), но с учетом цен на август каждого года, представлены на рис. 2. Отметим, что оптимальная полезность данного потребителя с бюджетом в 2 000 000 бел. руб. в августе 2009 г. была 28,45 условных единиц, а в августе 2016 г. – 7,77. Более высокий уровень полезности для августа по сравнению с январем связан с сезонными изменениями цен.

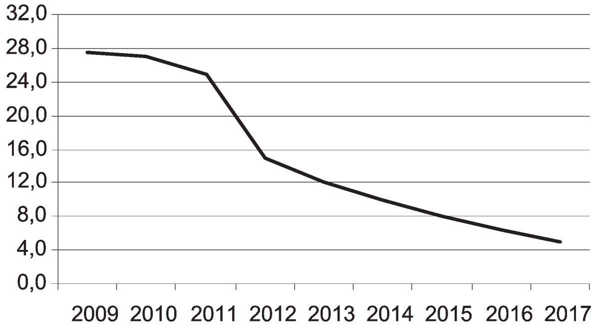

Рис. 1. Оптимальная полезность потребителя с месячным продуктовым бюджетом в 2 000 000 бел. руб., январь, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

[6] URL: https://pravo.by/document/?guid=12551&p0=W22035031

[7] URL: https://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/realny-sector-ekonomiki/tseny/potrebitelskie-tseny

Таблица 1

Состав и объемы продуктовой корзины для молодой семьи из трех человек

1. Хлеб ржаной (153,4) $\alpha_1 = 0{,}0233$	2. Хлеб пшеничный (129,7) $\alpha_2 = 0{,}0396$	3. Мука пшеничная (24,8) $\alpha_3 = 0{,}0043$
4. Макаронные изделия (14,6) $\alpha_4 = 0{,}0040$	5. Рис (12,8) $\alpha_5 = 0{,}0050$	6. Крупа манная (3,6) $\alpha_6 = 0{,}0008$
7. Крупа овсяная (6,6) $\alpha_7 = 0{,}0014$	8. Крупа гречневая (6,9) $\alpha_8 = 0{,}0018$	9. Крупа пшенная (4,4) $\alpha_9 = 0{,}0012$
10. Крупа перловая (3,3) $\alpha_{10} = 0{,}0004$	11. Бобовые (6,6) $\alpha_{11} = 0{,}0020$	12. Картофель (303,0) $\alpha_{12} = 0{,}0256$
13. Капуста (74,8) $\alpha_{13} = 0{,}0068$	14. Морковь (51,1) $\alpha_{14} = 0{,}0057$	15. Свекла (51,1) $\alpha_{15} = 0{,}0046$
16. Огурцы (43,8) $\alpha_{16} = 0{,}0400$	17. Томаты (43,8) $\alpha_{17} = 0{,}0317$	18. Другие овощи (40,2) $\alpha_{18} = 0{,}0350$
19. Овощные консервы (19,4) $\alpha_{19} = 0{,}0088$	20. Масло растительное (20,1) $\alpha_{20} = 0{,}0089$	21. Масло животное (27,3) $\alpha_{21} = 0{,}0315$
22. Молоко (255,6) $\alpha_{22} = 0{,}0338$	23. Кисломолочная продукция (171,6) $\alpha_{23} = 0{,}0551$	24. Сметана (16,8) $\alpha_{24} = 0{,}0100$
25. Сыр (9,2) $\alpha_{25} = 0{,}0107$	26. Творог (43,9) $\alpha_{26} = 0{,}0301$	27. Маргарин (2,2) $\alpha_{27} = 0{,}0012$
28. Яйцо, штук (708,1) $\alpha_{28} = 0{,}1793$	29. Колбасные изделия (25,6) $\alpha_{29} = 0{,}0334$	30. Говядина (61,6) $\alpha_{30} = 0{,}0835$
31. Свинина (17,9) $\alpha_{31} = 0{,}0239$	32. Субпродукты (7,7) $\alpha_{32} = 0{,}0105$	33. Птица (50,0) $\alpha_{33} = 0{,}0396$
34. Рыба свежая и мороженая (38,0) $\alpha_{34} = 0{,}0319$	35. Рыба соленая (7,7) $\alpha_{35} = 0{,}0056$	36. Фрукты (138,8) $\alpha_{36} = 0{,}0725$
37. Соки фруктовые (102,3) $\alpha_{37} = 0{,}0292$	38. Сухофрукты (18,3) $\alpha_{38} = 0{,}0176$	39. Сахар (69,4) $\alpha_{39} = 0{,}0127$
40. Чай (1,6) $\alpha_{40} = 0{,}0046$	41. Соль (8,4) $\alpha_{41} = 0{,}0003$	42. Кондитерские изделия (36,6) $\alpha_{42} = 0{,}0323$

Источник. Авторская разработка.

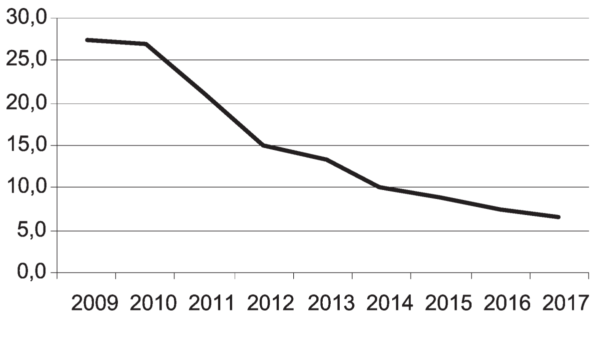

Рис. 2. Оптимальная полезность потребителя с месячным продуктовым бюджетом в 2 000 000 бел. руб., август, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

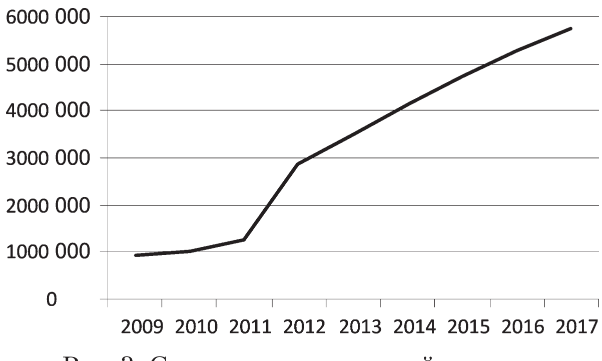

Рис. 3. Стоимость продуктовой корзины потребителя, январь, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

На рис. 3 показано изменение по годам (2009–2016 гг.) на январь месяц стоимости продуктовой потребительской корзины для молодой семьи из трех человек с учетом цен на январь каждого года.

Изменение по годам (2009–2016 гг.) на август месяц стоимости продуктовой потребительской корзины для молодой семьи из трех человек с учетом цен на август каждого года представлены на рис. 4.

На рис. 5 отражено изменение по годам (2009–2016 гг.) компенсационного месячного продуктового бюджета по Хиксу для молодой семьи из трех человек с уче-

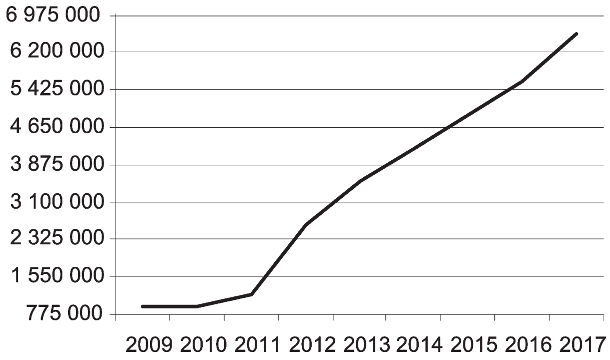

Рис. 4. Стоимость продуктовой корзины потребителя, август, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

том цен на январь месяц каждого года. На рисунке показаны месячные продуктовые бюджеты, которые гарантируют ту же оптимальную полезность потребителя при фактических ценах каждого года с 2009 по 2016 г., что и оптимальная полезность на январь месяц базового 2009 г. с месячным продуктовым бюджетом в 2 000 000 бел. руб. Расчеты получены на основе решения задачи (6), (7) при $\bar{u} = 27,43$.

Изменение по годам (2009–2016 г.) компенсационного месячного продуктового бюджета по Хиксу для молодой семьи из трех человек с учетом цен на август месяц каждого года представлены на рис. 6. Здесь показаны месячные продуктовые бюджеты, которые гарантируют ту же оптимальную полезность потребителя при фактических ценах каждого года, что и оптимальная полезность на август базового 2009 г. с месячным продуктовым бюджетом в 2 000 000 бел. руб. Эти расчеты получены на основе решения задачи (6), (7) при $\bar{u} = 28,46$.

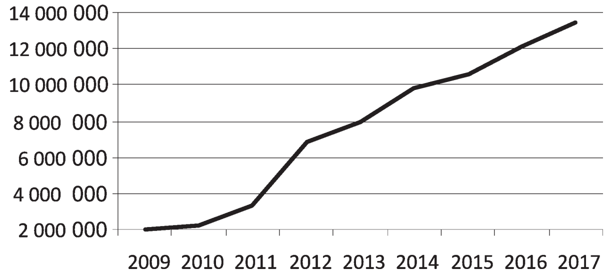

Рис. 6. Компенсационный бюджет по Хиксу, август, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

На рис. 7 представлено изменение оптимального потребления молочных, хлебных и мясных изделий без компенсации бюджета (т. е. с месячным продуктовым бюджетом в 2 000 000 бел. руб.), полученных на основе решения задачи оптимального потребления (1), (2) с функцией полезности Бернулли для молодой семьи из трех человек с учетом цен на январь каждого года с 2009 по 2016 г.

На графике (рис. 8) показано изменение истинного индекса стоимости жизни по Конюсу, который находится как отношение стоимостей двух оптимальных наборов товаров, обеспечивающих при разных ценах одинаковый уровень полезности. В данном случае полезность набора продуктовых товаров вычисляется с помощью функции Бернулли для молодой семьи из трех человек с ценами на январь месяц каждого года с 2009 по 2016 г. В качестве базового года взят 2009 г., для

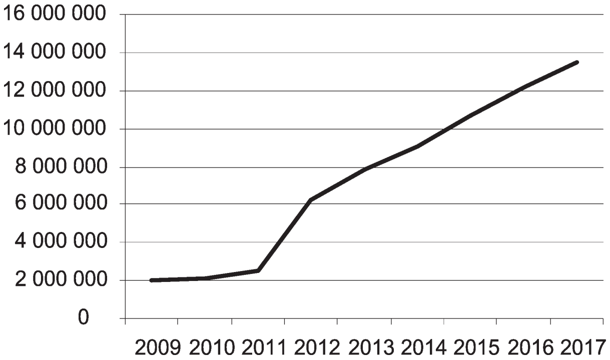

Рис. 5. Изменение компенсационного бюджета по Хиксу, январь, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

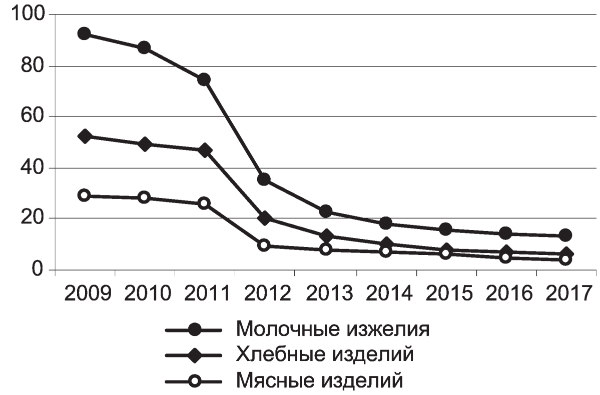

Рис. 7. Потребление молочных (верхняя линия), хлебных и мясных (нижняя линия) изделий без компенсации бюджета, январь, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

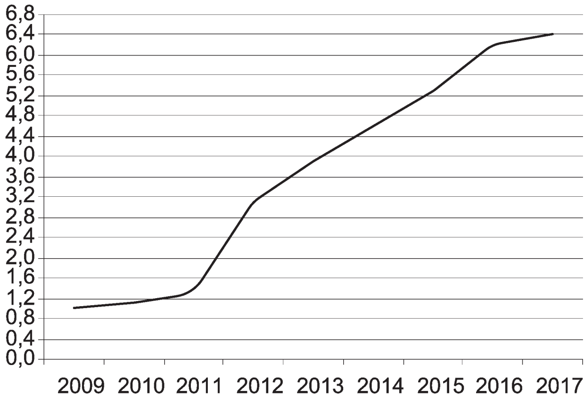

Рис. 8. Истинный индекс стоимости жизни по Конюсу, январь, 2009–2016 гг.

Источник. Авторская разработка.

которого истинный индекс стоимости жизни по Конюсу равен единице. С ростом данного индекса ухудшается уровень благосостояния потребителя.

Компенсационный бюджет по Слуцкому рассчитывается из условия покупки оптимального набора товаров базового года (в данном случае это 2009 г.) по ценам текущего года, а компенсационный бюджет по Хиксу – из условия достижения оптимального значения функции полезности (т. е. уровня благосостояния базового года) при ценах текущего года (табл. 2).

* * *

Признание научного приоритета за Е.Е. Слуцким в области исследования задач оптимального потребления в настоящее время неоспоримо. Вместе с тем использование уравнений Слуцкого для анализа потребительского рынка, определения компенсационных выплат в связи с изменением цен и бюджета потребителя, анализа изменения полезности различных социальных групп требует значительной аналитической работы. Сложностью при этом является выбор подходящих функций полезности, которые бы достаточно хорошо описывали предпочтения той или иной социальной-демографической группы. Следует отметить, что в литературе рассматривается ряд функций полезности, которые в той или иной степени описывают различные предпочтения потребителей.

В данной работе на основе метода А.А. Конюса с использованием данных Национального статистического комитета Республики Беларусь о продовольственных корзинах и их средним ценам по месяцам с 2009 по 2016 г. проведены сравнительные теоретические расчеты изменения полезности потребителей из конкретной социально-демографической группы (молодой семьи из трех человек). В качестве функции полезности была использована логарифметическая функция Бернулли (ее также называют функцией Стоуна-Джери). Отметим, что компенсационные бюджеты по Хиксу и оптимальные наборы товаров для потребителей, которые вычислены на основе логарифметической функции Бернулли, не изменятся, если взять любую другую функцию полезности, полученную из логарифметической функции Бернулли с помощью монотонного преобразования.

Проведенные теоретические расчеты компенсационных месячных продуктовых потребительских бюджетов на основе задачи оптимального потребления с функцией

Таблица 2

Компенсационные бюджеты и стоимость продуктовой корзины для молодой семьи из трех человек

Год	Январь			Август		
	Компенсационный бюджет		Стоимость корзины	Компенсационный бюджет		Стоимость корзины
	по Слуцкому	по Хиксу		по Слуцкому	по Хиксу	
2009	2 000 000	2 000 000	911 795	2 000 000	2 000 000	879 003
2010	2 121 284	2 116 602	967 066	2 221 833	2 212 051	963 364
2011	2 558 820	2 533 564	1 166 553	3 971 869	3 880 000	1 728 819
2012	6 258 241	6 164 182	2 853 568	6 977 619	6 876 425	3 047 179
2013	7 798 991	7 747 810	3 555 768	7 937 907	7 854 293	3 472 540
2014	9 183 624	9 083 528	4 186 815	10 101 708	9 910 505	4 371 759
2015	10 768 772	10 641 670	4 909 748	10 759 408	10 621 758	4 749 226
2016	12 407 265	12 236 745	5 656 873	12 306 504	12 064 083	5 419 768

Источник. Авторская разработка.

полезности Бернулли дают ориентиры для реальных изменений месячных продуктовых бюджетов с целью улучшения благосостояния потребителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

Альсевич В.В., Астровский А.И. 2016. Влияние изменений цен и доходов на полезность потребителя: к столетию уравнения Слуцкого. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. Вып. 10. С. 118–124. [Alsevich V., Astrovskii A. 2016. Influence of Price and Income Changes on the Utility of the Consumer: Dedicated to the 100th Anniversary of the Slutsky Equation. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie*. Vyp. 10. PP. 118–124. (In Russ.)]

Байкин А.А., Иванов Е.Ю. 2008. Выбор потребителя и конъюктурная информация. *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: социально-экономические науки*. Т. 8. Вып 1. С. 150–157. [Bajkin A.A., Ivanov E.Yu. 2008. Consumer's Choice and Conjuncture Information. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: sotsial'no-ekonomicheskie nauki*. Vol. 8. Vyp. 1. PP. 150–157. (In Russ.)]

Горбунов В.К. 2015. *Потребительский спрос: аналитическая теория и приложения*. Ульяновск: Ульяновский государственный университет. 264 с. [Gorbunov V.K. 2015. *Consumer Demand: Analytical Theory and Applications*. Ul'yanovsk: Ul'yanovskiy gosudarstvennyy universitet. 264 p. (In Russ.)]

Дымков М.П. 2014. Моделирование процессов накопления и распределения доходов в условиях простейшего рынка. *Научные труды Белорусского государственного экономического университета*. Вып. 7. С. 133–145. [Dymkov M.P. 2014. Modeling the Processes of Accumulation and Distribution of Income in the Conditions of the Simplest Market. *Nauchnye trudy Belorusskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta*. Vyp. 7. PP. 133–145. (In Russ.)]

Конюс А.А. 1924. Проблема истинного индекса стоимости жизни. *Экономический бюллетень Конъюнктурного института*. № 9–10. С. 36–37. [Konyus A.A. 1924. The Problem of the True Index of the Cost of Living. *Ekonomicheskiy byulleten' Kon"yunkturnogo instituta*. No 9–10. PP. 36–37. (In Russ.)]

Конюс А.А., Бюшгенс С.С. 1926. К проблеме покупательной силы денег. *Вопросы конъюнктуры*. Т. II. Вып. I. С. 151–172. [Konyus A.A., Byushgens S.S. 1926. On the Problem of the Purchasing Power of Money. *Voprosy kon"yunktury*. Vol. II. Iss. I. PP. 151–172. (In Russ.)]

Маршалл А. 1983–1984. *Принципы политической экономии*. Москва: Прогресс. [Marshall A. 1983–1984. Principles of Political Economy. Noscow: Progress. (In Russ.)]

Хикс Дж.Р. 1993. *Стоимость и капитал*. Москва: Прогресс. [Hicks J.R. 1993. *Value and Capital*. Moscow: Progress. (In Russ.)]

Aleskerov F., Bouyssou D., Monjardet B. 2007. *Utility Maximization, Choice and Preference*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-34183-3

Chipman J.S., Lenfant J.-S. 2002. Slutsky's 1915 Article: How It Came to Be Found and Interpreted. *History of political economy*. Vol. 34. No 3. PP. 553–597. DOI: 10.1215/00182702-34-3-553

Hicks J.R., Allen R.G.D. 1934. A Reconsideration of the Theory of Value. Part II. A Mathematical Theory of Individual Demand Functions. *Economica, New Series*. Vol. 1. No 2. PP. 196–219. DOI: 10.2307/2548749

Slutsky E.E. 1915. Sulla teoria del bilancio del consumatore. *Giornale degli Economisti*. Vol. 51. No 1. PP. 1–26.

ASSESSMENT OF THE IMPACT OF PRICE CHANGES ON CONSUMER UTILITY

Anatoly Astrovskii[1] (https://orcid.org/0000-0001-5761-4415),
Michael Dymkov[1] (https://orcid.org/0000-0002-3467-2169),
Nicolay Denisenko[1]

[1] Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus).

Corresponding author: Anatoly Astrovskii (aastrov53@gmail.com).

ABSTRACT. The paper describes the problems of optimal consumption and assessing the impact of price changes on consumer utility. Based on Slutsky's equations, relationships between indicators of comparative statics, including compensation indicators, have been established. A computational experiment is described to analyze and evaluate the impact of prices on the utility of a consumer (a young family of three) for the period 2009–2016 based on the Bernoulli (Stone-Jeri) utility function. Compensation budgets according to Slutsky and Hicks are given, as well as the values of the cost of living index according to Konus.

KEYWORDS: utility function, consumer basket, optimal consumption problem, compensation according to Slutsky and Hicks.

JEL-code: C36, C61, D11, D12, D13.

DOI: 10.46782/1818-4510-2024-1-50-61

Received 8.01.2024

In citation: Astrovskii A., Dymkov M., Denisenko N. 2024. Assessment of the Impact of Price changes on Consumer Utility. *Belorusskiy ekonomicheskiy zhurnal*. No 1. PP. 50–61. DOI: 10.46782/1818-4510-2024-1-50-61 (In Russ.)

■ ■ ■