БЕЛОРУССКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2024. № 2. С. 81–97.
Belarusian Economic Journal. 2024. No 2. PP. 81–97.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МОТОДЫ

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ЖИЛИЩНОЙ ПОЛИТИКИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

А.А. Литвинович, М.М. Ерёменко, Э.М. Аксень*

Аннотация. Представлена методика построения межвременного интегрального социально-экономического показателя с использованием эластичностей замещения. Сформулирована и исследована динамическая задача максимизации указанного показателя с учетом ограничений на показатели результативности жилищной политики. Предложен способ оценивания влияния динамики показателей результативности жилищной политики на значение межвременного интегрального социально-экономического показателя с учетом запаздывания. Проведено исследование для случая с бесконечным горизонтом планирования и получены аналитические формулы для расчета долей показателей результативности жилищной политики по регионам.

Ключевые слова: жилищная политика, динамика, интегральный показатель, оптимизация, моделирование.

JEL-классификация: R31, C61.

DOI: 10.46782/1818-4510-2024-2-81-97

Материал поступил 18.03.2024 г.

Развитие рынков жилых объектов недвижимости имеет особое значение, так как обеспеченность жильем, его доступность для населения напрямую влияют на уровень жизни, отражаются на темпах прироста населения и других социально-экономических показателях.

При моделировании распределения показателей следует принимать во внимание запаздывание влияния объясняющих факторов на результативные показатели.

В статье предложена методика построения и анализа экономико-математических моделей для определения показателей результативности жилищной политики между регионами с учетом запаздывания.

Схожими проблемами прогнозирования объемов строительства жилья и инвестиций в жилищную сферу занимались многие исследователи: российские – Г.М. Стерник, С.Г. Стерник, В.К. Севек, О.Н. Монгуш, А.Э. Чульдум, А.А. Салчак, Т.А. Игнашева, Т.А. Дуброва, А.Н. Лозовская, Л.П. Бакуменко, Т.В. Сарычева, М.И. Каменецкий, А.А. Кузьменков, Е.Г. Емельянова, Е.Б. Олейник, А.П. Захарова, А.Б. Копейкин, Н.Н. Рогожина, А.А. Туманов и др.; нигерийский – У. Осили (Osili, 2005); японские и американские – Ф. Хаяши, Т. Итои, Дж. Слемрод (Hayashi, Ito, Slemrod, 1988); британские – С. Аделикан, С. Вамузири, В. Бинсарди, Л. Браун (Browne, 2000); белорусские – В.В. Валетко (2011), М.М. Ерёменко (2018).

Т.А. Дуброва[1] предложила подход к прогнозированию показателя ввода в действие жилых домов в своем регионе на основе комбинирования частных прогнозов.

[1] Дуброва Т.А. 2003. *Статистические методы прогнозирования*: учебное пособие. Москва: ЮНИТИ-ДАНА.

* **Литвинович Анастасия Александровна** (litvinovich@bsu.by), Белорусский государственный университет (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0009-0003-4725-2344

Ерёменко Марина Михайловна (zilpol@tut.by), Институт жилища – НИПТИС им. Атаева С.С. (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0000-0002-9183-6393

Аксень Эрнест Маврициевич (eaksen@mail.ru), доктор экономических наук, профессор, Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0000-0001-6627-8521

Для цитирования: Литвинович А.А., Ерёменко М.М., Аксень Э.М. 2024. Методика моделирования оптимального распределения показателей результативности жилищной политики с учетом запаздывания. *Белорусский экономический журнал*. № 2. С. 81–97. DOI: 10.46782/1818-4510-2024-2-81-97

В.В. Валетко (2011) с помощью эконометрического анализа исследовал влияние динамики заработной платы на объем строительства жилья.

Г.М. Стерник (2012) предложил методику прогнозирования динамики цен, а также иные показатели системы «рынок жилья»: предложение, спрос, поглощение площадей, объем строительства и ввода жилья на основе имитационной итерационной модели с обратными связями. В работе (Стерник, Стерник, 2018) разработана модель прогнозирования объемов строительства и ввода жилья с учетом прогнозируемой доходности инвестиций в девелопмент.

В.К. Севек, О.Н. Монгуш, А.Э. Чульдум и А.А. Салчак (2015) прогнозировали объемы жилищного строительства на основе корреляционно-регрессионного анализа с помощью статистических данных динамики изменения ввода жилья, средней стоимости строительства и финансирования строительства жилья.

Т.А. Игнашева (2014) разработала модель прогнозирования объемов жилищного строительства в г. Йошкар-Оле с использованием метода экспоненциального сглаживания.

Е.Б. Олейник и А.П. Захарова (2012) при прогнозировании объемов жилищного строительства предлагают метод скользящих средних.

А.Б. Копейкин, Н.Н. Рогожина, А.А. Туманов (2007) считают, что оценить суммарный спрос на жилье на конкретной территории возможно на основе таких факторов, как количество вновь возникающих семей, результирующие миграционные процессы, рост занятости, возможность и финансовые условия получения кредитов на покупку жилья, уровень цен на жилье, стоимость связанных с жильем расходов (эксплуатационные расходы, страховка, налог на недвижимость), инфляционные ожидания населения. При этом методику оценки авторы не приводят.

Л. Браун (2000) исследовал корреляционную связь между инвестициями в одноквартирные и многоквартирные жилые дома.

М.М. Еременко (2018) разработала модель прогнозирования объемов инвестиций населения в основной капитал на строительство жилых домов.

Методика моделирования влияния жилищной политики на социально-экономические показатели

Пусть n – число регионов в рассматриваемой социально-экономической системе. В случае, когда в качестве социально-экономической системы выступает Республика Беларусь, а регионы – это области республики и город Минск, $n = 7$. Через m обозначим число фигурирующих в модели показателей результативности жилищной политики (например, общая площадь жилых домов, введенных в эксплуатацию, объем субсидий и т. п.). Для обозначения значения j-го показателя жилищной политики в i-м регионе для t-го периода времени ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$) будем использовать $x_{ij}(t)$.

Пусть s – число социально-экономических показателей (например, число родившихся за некоторый период времени, обеспеченность граждан общей площадью жилья и т. п.). Значение k-го социально-экономического показателя жилищной политики в i-м регионе для t-го периода времени ($i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,s}$) обозначим через $y_{ik}(t)$. В соответствии с предлагаемой нами методикой имеет место зависимость (с запаздыванием) показателей $y_{ik}(t)$ от показателей $x_{ij}(t)$.

Замечание 1. В дальнейшем в модели мы будем работать с безразмерными значениями показателей $x_{ij}(t)$ и $y_{ik}(t)$:

$$x_{ij}(t) = \frac{X_{ij}(t)}{\xi_j}, \qquad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}; \tag{1}$$

$$y_{ik}(t) = \frac{Y_{ik}(t)}{\eta_k}, \qquad i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,s}, \tag{2}$$

где $X_{ij}(t)$ и $Y_{ik}(t)$ – размерные значения показателей $x_{ij}(t)$ и $y_{ik}(t)$, а ξ_j и η_k – соответствующие единицы измерения. В частности, для показателя результативности жилищной политики «объем ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов» использована единица измерения ξ_j (тыс. м$^{2)}$, а для социально-экономического показателя «годовое число родившихся» – η_k (чел.).

Для учета запаздывания влияния объясняющих факторов $x_{ij}(t)$ на результирующие показатели $y_{ik}(t)$ определим ненаблюдаемые показатели $\tilde{x}_{ijk}(t)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(t-1) \cdot \left[\frac{x_{ij}(t)}{\tilde{x}_{ijk}(t-1)}\right]^{\gamma_{ijk}}, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,s}, \tag{3}$$

где γ_{ijk} – параметры, которые оцениваются с помощью фактических данных.

Замечание 2. Отметим, что ненаблюдаемые показатели $\tilde{x}_{ijk}(t)$ также безразмерные (как и наблюдаемые $x_{ij}(t)$). Размерные ненаблюдаемые показатели $\tilde{X}_{ijk}(t)$ могут быть получены в соответствии с равенством (1) по формуле:

$$\tilde{X}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(t) \cdot \xi_j, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,s}. \tag{4}$$

Отметим также, что параметры γ_{ijk} – безразмерные (причем не зависящие от единиц измерения ξ_j).

Прологарифмируем формулу (3):

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right] + \gamma_{ijk} \cdot \left\{\ln\left[x_{ij}(t)\right] - \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]\right\}, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,s}. \tag{5}$$

Замечание 3. Использование именно безразмерных значений $x_{ij}(t)$ в формуле (5) имеет важное значение, поскольку размерные величины (в нашем случае $X_{ij}(t)$) логарифмировать нельзя.

Замечание 4. Отметим, что $\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]$ – взвешенное среднее значений $\ln\left[x_{ij}(t)\right]$ и $\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]$, поскольку из равенства (5) следует, что

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{ijk} \ln\left[x_{ij}(t)\right] + \left(1-\gamma_{ijk}\right) \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right], \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,s}. \tag{6}$$

Замечание 5. Формулы (3) и (5) дают возможность найти траектории $\tilde{x}_{ijk}(t)$ и $\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]$ с помощью заданного значения $\tilde{x}_{ijk}(t_0)$ в начальный момент времени t_0, а именно:

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right]^{\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-t_0}} \prod_{\tau=t_0+1}^{t} \left[x_{ij}(\tau)\right]^{\gamma_{ijk}\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-\tau}}, \qquad t \ge t_0, \tag{7}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{ijk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^{t} \left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-\tau} \ln\left[x_{ij}(\tau)\right] + \left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-t_0} \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right], \qquad t \ge t_0, \tag{8}$$

$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,s}$.

Замечание 6. В расчетах (см. ниже) мы считаем, что t_0 соответствует 1999 г., а при оценке параметров модели полагали, что $\tilde{x}_{ijk}(t_0) = x_{ij}(t_0+1)$.

Через $\hat{y}_{ik}(t)$ обозначим прогнозное значение *k*-го социально-экономического показателя результативности жилищной политики в *i*-м регионе для *t*-го периода времени ($i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$). Будем использовать следующую формулу для нахождения прогнозных значений $\hat{y}_{ik}(t)$:

$$\hat{y}_{ik}(t)=a_{ik}\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{ijk}^{b_{ijk}}(t),\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\tag{9}$$

где a_{ik} и b_{ijk} – параметры, которые оцениваются с помощью фактических данных.

Замечание 7. Прогнозные значения $\hat{y}_{ik}(t)$ показателей $y_{ik}(t)$ также безразмерные (как и сами показатели $y_{ik}(t)$). Размерные прогнозные показатели $\hat{Y}_{ik}(t)$ могут быть получены в соответствии с равенством (2):

$$\hat{Y}_{ik}(t)=\hat{y}_{ik}(t)\cdot\eta_k.\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s}.\tag{10}$$

Отметим также, что параметры a_{ik} и b_{ijk} – безразмерные (причем параметры a_{ik} зависят от единиц измерения ξ_j и η_k, а параметры b_{ijk} – нет).

В силу равенств (1), (10) из формулы (9) следует:

$$\hat{Y}_{ik}(t)=a_{ik}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\tilde{X}_{ijk}(t)}{\xi_j}\right)^{b_{ijk}}\eta_k,\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s}.\tag{11}$$

Прологарифмировав формулу (9), получим:

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right]=\ln a_{ik}+\sum_{j=1}^{m}b_{ijk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right],\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s}.\tag{12}$$

Через T обозначим последний год, для которого известны значения всех показателей результативности жилищной политики x_{ij} и y_{ik}. В нашем случае T соответствует 2019 г. (поскольку это последний год, для которого доступны данные о количестве родившихся людей по регионам Беларуси).

В соответствии с формулами (5), (12) и замечанием 6, значения параметров γ_{ijk}, a_{ik} и b_{ijk} ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$) будем находить с помощью решения следующих оптимизационных задач:

$$\sum_{t=t_0+1}^{T_0}\left[\ln y_{ik}(t)-\ln\hat{y}_{ik}(t)\right]^2\to\min,\tag{13}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]=\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]+\gamma_{ijk}\cdot\left\{\ln\left[x_{ij}(t)\right]-\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]\right\},\ t=\overline{t_0+1,T},\tag{14}$$

$$\tilde{x}_i(t_0)=x_i(t_0+1),\tag{15}$$

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right]=\ln a_{ik}+\sum_{j=1}^{m}b_{ijk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right],\qquad t=\overline{t_0+1,T}.\tag{16}$$

Для каждого отдельно взятого региона и социально-экономического показателя решается своя задача (13)–(16) (и, следовательно, число таких задач равно $n\cdot s$). В этих задачах $x_{ij}(t)$ и $y_{ik}(t)$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$, $t=\overline{t_0+1,T_0}$) – известные (табличные) значения, $\ln a_{ik}$, b_{ijk}, γ_{ijk} – переменные.

Замечание 8. В случае, когда в модели используется только один показатель результативности жилищной политики и один социально-экономический показатель (т. е. $m=1$ и $s=1$), нет необходимости в индексах j и k для показателей $x_{ij}(t)$ и $y_{ik}(t)$ и параметров a_{ik}, b_{ijk}, γ_{ijk}. Следовательно, указанные показатели и параметры можно записать: $x_i(t)$, $y_i(t)$, a_i, b_i, γ_i.

Нами были получены решения для задач (13)–(16) для каждого региона отдельно (при $t_0 = 1999$ г. и $T = 2019$ г.) для случая, когда оперируем одним показателем результативности жилищной политики и одним социально-экономическим показателем (т. е. $m = 1$ и $s = 1$). При этом в качестве показателя результативности жилищной политики использовался годовой объем ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску (тыс. м^2), а в качестве социально-экономического показателя – годовое число родившихся по областям и г. Минску (чел.). Найденные значения параметров $\ln a_i$, b_i, γ_i, ($i = \overline{1,n}$) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров $\ln a_i$, b_i, γ_i, полученные с помощью фактических данных в Республике Беларусь, 2000–2019 гг.

Параметры	Регион Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
$\ln a_i$	7,3674	3,0709	6,0612	5,9137	5,7800	7,2510	4,2801
b_i	0,3607	1,0489	0,5766	0,5541	0,6056	0,3537	0,8521
γ_i	0,4134	0,1329	0,2132	0,3288	0,3911	0,6252	0,1661

Источник. Авторская разработка.

Замечание 9. В соответствии с замечаниями 2 и 6, параметры $\ln a_i$, b_i, γ_i – безразмерные (причем параметры $\ln a_i$ зависят от единиц измерения ξ и η, а параметры b_i, γ_i – нет). В расчетах для получения значений параметров в табл. 1 для показателя результативности жилищной политики «объем ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов» мы использовали единицу измерения ξ – тыс. м^2, для социально-экономического показателя «годовое число родившихся» η единица измерения – чел.

Методика построения межвременного интегрального социально-экономического показателя

Введем межвременной (динамический) интегральный показатель для социально-экономических показателей за период с T_1-го года по T_2-й год:

$$Y(T_1, T_2) = \prod_{t=T_1}^{T_2} \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{s} y_{ik}^{\alpha_{ik}(t)}(t), \tag{17}$$

где $\alpha_{ik}(t)$ – весовой коэффициент для k-го социально-экономического показателя для i-го региона в t-м периоде, причем

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}(t) = 1. \tag{18}$$

Методика нахождения весовых коэффициентов $\alpha_{ik}(t)$ представлена ниже.

Отметим, что интегральный показатель (17) представляет собой геометрическое среднее взвешенное значение показателей $y_{ik}(t)$ ($i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,s}$, $t = \overline{T_1, T_2}$).

Замечание 10. Для различных социально-экономических показателей $y_{ik}(t)$ (при различных значениях индекса k) могут использоваться разные единицы измерения. Тогда значения $y_{ik}(t)$ должны быть приведены к одним единицам измерения (например, стать безразмерными). Это достигается делением указанных показателей на соответствующие единицы измерения, либо на значения соответствующих показателей в некотором базовом году (например, в начальном T_1-м году, т. е. $y_{ik}(t)$ для использования в формуле (17) нужно будет предварительно разделить на $y_{ik}(T_1)$ ($i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$, $t=\overline{T_1,T_2}$)).

С помощью формулы (17) можно показать, что отношение $\dfrac{\alpha_{ik}(t)}{\alpha_{lq}(\tau)}$ равно точечной эластичности $e_{ik;lq}(t,\tau)$ замещения $y_{ik}(t)$ на $y_{lq}(\tau)$, т. е. оно показывает процентное увеличение значение q-го социально-экономического показателя в l-м регионе в t-м периоде при уменьшении на 1% k-го показателя в i-м регионе в t-м периоде, чтобы значение интегрального социально-экономического показателя $Y(T_1,T_2)$ не изменилось. Следовательно, через оценку эластичности замещения $e_{ik;lq}(t,\tau)$ можно найти весовые коэффициенты $\alpha_{ik}(t)$ ($i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$, $t=\overline{T_1,T_2}$). Для решения предлагаем систему уравнений (при фиксированных значениях l, q и τ):

$$\frac{\alpha_{ik}(t)}{\alpha_{lq}(\tau)}=e_{ik;lq}(t,\tau),\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2},\tag{19}$$

$$\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)=1.\tag{20}$$

Решение системы уравнений (19) и (20) имеет вид:

$$\alpha_{ik}(t)=\frac{e_{ik;lq}(t,\tau)}{E_{lq}(\tau)},\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2},\tag{21}$$

где

$$E_{lq}(\tau):=\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}e_{ik;lq}(t,\tau).\tag{22}$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}_{ik}(t)$ выражение:

$$\tilde{\alpha}_{ik}(t):=\frac{\alpha_{ik}(t)}{\varphi(t)},\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2},\tag{23}$$

где

$$\varphi(t):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t),\qquad t=\overline{T_1,T_2}.\tag{24}$$

Из формулы (23) следует, что

$$\frac{\tilde{\alpha}_{ik}(t)}{\tilde{\alpha}_{lq}(t)}=\frac{\alpha_{ik}(t)}{\alpha_{lq}(t)},\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n},\ q=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}.\tag{25}$$

Из равенства (19) получим:

$$\frac{\tilde{\alpha}_{ik}(t)}{\tilde{\alpha}_{lq}(t)}=e_{ik;lq}(t),\qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n},\ q=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2},\tag{26}$$

где $e_{ik;lq}(t)$ – точечная эластичность замещения $y_{ik}(t)$ на $y_{lq}(t)$ (т. е. $e_{ik;lq}(t)=e_{ik;lq}(t,\tau)$ при $\tau=t$).

Заметим также, что из равенств (23) и (24) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\tilde{\alpha}_{ik}(t)=1, \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \tag{27}$$

Из равенств (26), (27) можно вывести формулу, аналогичную формуле (21):

$$\tilde{\alpha}_{ik}(t)=\frac{e_{ik;lq}(t)}{E_{lq}(t)}, \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}, \tag{28}$$

где
$$\tilde{E}_{lq}(t):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}e_{ik;lq}(t). \tag{29}$$

Введем интегральный показатель $Y(t)$ социально-экономических показателей в периоде t:

$$Y(t):=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{s}y_{ik}^{\tilde{\alpha}_{ik}(t)}(t), \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \tag{30}$$

Из соотношений (17), (23), (24), (30) следует, что

$$Y\left(T_1,T_2\right)=\prod_{t=T_1}^{T_2}\left[Y(t)\right]^{\varphi(t)}. \tag{31}$$

Отметим, что в силу равенств (18) и (24)

$$\sum_{t=T_1}^{T_2}\varphi(t)=1. \tag{32}$$

С помощью формулы (31) покажем, что отношение $\frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)}$ равно точечной эластичности $e(t,\tau)$ замещения $Y(t)$ на $Y(\tau)$, т. е. оно показывает процентное увеличение интегрального социально-экономического показателя $Y(\tau)$ в t-м периоде при уменьшении на 1% указанного показателя $Y(t)$ в t-м периоде так, чтобы значение межвременного интегрального социально-экономического показателя $Y\left(T_1,T_2\right)$ не изменилось.

Из соотношений:

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)}=e(t,\tau), \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}, \qquad \tau=\overline{T_1,T_2} \tag{33}$$

и равенства (32) следует:

$$\varphi(t)=\frac{e(t,\tau)}{E(\tau)}, \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}, \qquad \tau=\overline{T_1,T_2}, \tag{34}$$

где

$$E(\tau):=\sum_{t=T_1}^{T_2}e(t,\tau), \qquad \tau=\overline{T_1,T_2}. \tag{35}$$

При $\tau=T_1$ формула (34) принимает вид:

$$\varphi(t)=\frac{e(t,T_1)}{E(T_1)}, \qquad t=\overline{T_1,T_2}, \qquad \tau=\overline{T_1,T_2}, \tag{36}$$

Покажем, что

$$e\left(t,T_1\right)=\prod_{\tau=T_1}^{t-1}e(\tau+1,\tau), \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}. \tag{37}$$

Отметим, что эластичность $e(\tau+1,\tau)$ показывает процентное увеличение интегрального социально-экономического показателя Y в текущем периоде при уменьшении на 1% указанного показателя в следующем периоде так, чтобы значение межвременного интегрального социально-экономического показателя $Y\left(T_1,T_2\right)$ не изменилось.

Обозначим «краткосрочные» эластичности $e(\tau+1,\tau)$ через $\delta(\tau)$:

$$\delta(\tau):=e(\tau+1,\tau), \qquad \tau=\overline{T_1,T_2-1}. \tag{38}$$

В частном случае, когда $\delta(\tau)$ не зависят от τ, из равенств (37) и (38) следует:

$$e\left(t,T_1\right)=\delta^{t-T_1}, \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}. \tag{39}$$

Подставим формулу (39) в равенство (36):

$$\varphi(t)=\frac{\delta^{t-T_1}}{E(T_1)}, \qquad t=\overline{T_1,T_2}, \qquad \tau=\overline{T_1,T_2}. \tag{40}$$

Подставив формулу (39) в равенство (35) при $\tau=T_1$ и воспользовавшись при $\delta\neq 1$ формулой для суммы геометрической прогрессии, получим:

$$E\left(T_1\right):=\frac{1-\delta^{T-T_1+1}}{1-\delta}, \tag{41}$$

а при $\delta=1$ из (35) следует, что $E\left(T_1\right)=T_2-T_1+1$. Следовательно,

$$\varphi(t)=\begin{cases}\delta^{t-T_1}\dfrac{1-\delta}{1-\delta^{T_2-T_1+1}} & \text{при } \delta\neq 1,\\ \dfrac{1}{T_2-T_1+1} & \text{при } \delta=1,\end{cases} \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \tag{42}$$

Формула (42) может быть использована для вычисления коэффициентов $\varphi(t)$. При этом «краткосрочная» эластичность δ может быть оценена экспертным образом.

Заметим, что из равенства (23) следует:

$$\alpha_{ik}(t)=\tilde{\alpha}_{ik}(t)\varphi(t), \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}. \tag{43}$$

Эта формула может быть использована для нахождения коэффициентов $\alpha_{ik}(t)$.

Замечание 11. В случае использования в модели только одного социально-экономического показателя (т. е. когда $s=1$) нет необходимости использовать индексы k и q для коэффициентов $\alpha_{ik}(t)$, $e_{ik;lq}(t,\tau)$, $\tilde{\alpha}_{ik}(t)$ и $e_{ik;lq}(t)$. Следовательно, указанные коэффициенты можно записать: $\alpha_i(t)$, $e_{il}(t,\tau)$, $\tilde{\alpha}_i(t)$ и $e_{il}(t)$. Тогда формулы (21), (22), (28), (29), (43) примут вид:

$$\alpha_i(t)=\frac{e_{il}(t,\tau)}{E_l(\tau)}, \qquad i=\overline{1,n},\ t=\overline{T_1,T_2}, \tag{44}$$

$$E_{lq}(\tau):=\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}e_{il}(t,\tau), \tag{45}$$

$$\tilde{\alpha}_i(t)=\frac{e_{il}(t)}{E_l(t)}, \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}, \tag{46}$$

$$\tilde{E}_l(t):=\sum_{i=1}^{n}e_{il}(t), \tag{47}$$

$$\alpha_i(t)=\tilde{\alpha}_i(t)\varphi(t), \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}. \tag{48}$$

Приведем условный пример. Пусть экспертным методом оценены значения эластичностей $e_{il}(t)$ замещения численности родившихся в регионах Беларуси, и при этом значения указанных эластичностей одинаковы для всех лет (а значение индекса l соответствует г. Минску, т. е. $l=5$) (табл. 2).

Таблица 2

Условные значения эластичностей e_{il} замещения численности родившихся в регионах Беларуси

Показатель	Регионы Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
Эластичность e_{il}	e_{15}	e_{25}	e_{35}	e_{45}	e_{55}	e_{65}	e_{75}
	1,2	0,8	0,9	1,2	1	1,3	1,1

Источник. Авторская разработка.

Тогда с помощью формулы (46) (с учетом (47)) получаем значения весовых коэффициентов (табл. 3).

Таблица 3

Расчетные значения коэффициентов $\tilde{\alpha}_i$ *

Показатель	Регионы Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская бласть	Могилевская область
Весовой коэффициент $\tilde{\alpha}_i$	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_5$	$\tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_7$
	0,1600	0,1067	0,1200	0,1600	0,1333	0,1733	0,1467

* Значения получены с помощью условных значений эластичностей из табл. 2

Источник. Авторская разработка.

Пусть в условиях рассматриваемого примера межвременная краткосрочная эластичность δ равна 0,95. Это означает, что значение интегрального социально-экономического показателя Y должно увеличиться на 0,95% в текущем периоде при уменьшении на 1% указанного показателя в следующем периоде, чтобы значение межвременного интегрального социально-экономического показателя $Y(T_1, T_2)$ не изменилось. Найдем значение коэффициента $\varphi(t)$ для пятилетнего горизонта планирования (при $T_1=1$ и $T_2=5$) по формуле (42) (табл. 4).

Таблица 4

Расчетные значения коэффициента $\varphi(t)$ при условном значении $\delta=0,95$

Показатель	Номер года (в пятилетнем горизонте планирования)				
	1	2	3	4	5
Коэффициент $\varphi(t)$	0,2210	0,2100	0,1995	0,1895	0,1800

Источник. Авторская разработка.

С помощью найденных значений $\tilde{\alpha}_i$ и $\varphi(t)$ (см. табл. 3, 4) найдем значения коэффициентов $\alpha_i(t)$ по формуле (48) (табл. 5).

Таблица 5

Расчетные значения коэффициентов $\alpha_i(t)$ *

Номер года	Регион Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
	$\alpha_1(t)$	$\alpha_2(t)$	$\alpha_3(t)$	$\alpha_4(t)$	$\alpha_5(t)$	$\alpha_6(t)$	$\alpha_7(t)$
1	0,0354	0,0236	0,0265	0,0354	0,0295	0,0383	0,0324
2	0,0336	0,0224	0,0252	0,0336	0,0280	0,0364	0,0308
3	0,0319	0,0213	0,0239	0,0319	0,0266	0,0346	0,0293
4	0,0303	0,0202	0,0227	0,0303	0,0253	0,0328	0,0278
5	0,0288	0,0192	0,0216	0,0288	0,0240	0,0312	0,0264

* Значения получены с помощью условных значений эластичностей из табл. 2 и с использованием условного значения $\delta = 0{,}95$.

Источник. Авторская разработка.

Задача максимизации межвременного интегрального социально-экономического показателя

Предположим, что в t-м году в целом в Беларуси суммарное взвешенное значение j-го показателя результативности жилищной политики не должно превышать планового значения $B_j(t)$. Например, в целом по Беларуси планируется построить $B_j(t)$ тыс. м^2 общей площади жилья. Тогда при планировании показателей результативности жилищной политики по регионам нужно учитывать ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)x_{ij}(t) \le B_j(t), \qquad j=\overline{1,m}, \qquad t=\overline{T_1, T_2}, \tag{49}$$

где $c_{ij}(t)$ – известные коэффициенты, $[T_1, T_2]$ – период планирования.

Следовательно, в задаче максимизации межвременного интегрального показателя (17) для планового периода с T_1-го года по T_2-й год должны учитываться условия (49), а также соотношения (7) и (9) (либо эквивалентные им соотношения (8), (12)).

Оптимизационная задача с прологарифмированной целевой функцией и прологарифмированными (некоторыми) ограничениями эквивалентна исходной задаче. Прологарифмировав формулу (17) (и используя соотношения (8), (12)), получим оптимизационную задачу, равносильную задаче максимизации межвременного интегрального показателя (17):

$$\ln Y\left(T_1,T_2\right) = \sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)\ln y_{ik}(t) \to \max, \tag{50}$$

$$\ln\left[y_{ik}(t)\right] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^{m} b_{ijk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]. \quad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s},\ t=\overline{T_1,T_2}, \tag{51}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{ijk}\cdot\sum_{\tau=T_1}^{t}\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-\tau}\ln\left[x_{ij}(\tau)\right] + \left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-t_0}\ln\left[\tilde{x}_{ijk}\left(T_0-1\right)\right], \tag{52}$$

$i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$, $t=\overline{T_1,T_2}$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)x_{ij}(t) \le B_j(t), \qquad j=\overline{1,m}, \qquad t=\overline{T_1,T_2}, \tag{53}$$

$$x_{ij}(t) \ge 0, \qquad i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m} \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \tag{54}$$

Замечание 12. Для удобства восприятия формул мы не используем диакритический знак «^» в соотношениях (50), (51) над $y_{ik}(t)$ (хотя в данном случае под $y_{ik}(t)$ имеются в виду прогнозные значения этих показателей).

Подставив формулу (51) в равенство (50), имеем:

$$\ln Y\left(T_1,T_2\right)=\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)\ln a_{ik}+\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ik}(t)b_{ijk}\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]. \tag{55}$$

Подставив выражение (52) в формулу (55), получим:

$$\begin{aligned}\ln Y\left(T_1,T_2\right)=\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)\ln a_{ik}+\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ik}(t)b_{ijk}\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-t_0}\ln\left[\tilde{x}_{ijk}\left(T_1-1\right)\right]+\\+\sum_{\tau=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\ln\left[x_{ij}(\tau)\right]\sum_{t=\tau}^{T_2}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)b_{ijk}\gamma_{ijk}\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{t-\tau}.\end{aligned} \tag{56}$$

Следовательно, оптимизационная задача (50)–(54) эквивалентна следующей:

$$\sum_{t=T_1}^{T_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(t)\ln\left[x_{ij}(t)\right]\to\max, \tag{57}$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ij}(t)x_{ij}(t)\le B_j(t),\quad j=\overline{1,m},\qquad t=\overline{T_1,T_2}, \tag{58}$$

$$x_{ij}(t)\ge 0,\qquad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\qquad t=\overline{T_1,T_2}, \tag{59}$$

где

$$\beta_{ij}(t):=\sum_{k=1}^{s}b_{ijk}\gamma_{ijk}\sum_{\tau=t}^{T_2}\alpha_{ik}(\tau)\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{\tau-t}. \tag{60}$$

Заметим, что динамическую оптимизационную задачу (57)–(50) можно разбить на T_2-T_1+1 более простых статических задач:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(t)\ln\left[x_{ij}(t)\right]\to\max, \tag{61}$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ij}(t)x_{ij}(t)\le B_j(t),\quad j=\overline{1,m}, \tag{62}$$

$$x_{ij}(t)\ge 0,\qquad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m} \tag{63}$$

отдельно для каждого значения $t=\overline{T_1,T_2}$.

Для решения оптимизационных задач (61)–(63) будем использовать метод множителей Лагранжа[2]. Построим функцию Лагранжа для задачи (61)–(63):

$$L(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(t)\ln\left[x_{ij}(t)\right]-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ij}(t)x_{ij}(t)-B_j(t)\right]. \tag{64}$$

Продифференцировав (64) по $x_{ij}(t)$ и приравняв полученные выражения к нулю получим:

$$\frac{\beta_{ij}(t)}{x_{ij}(t)}-c_{ij}(t)\lambda_j(t)=0,\qquad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}. \tag{65}$$

Условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителей Лагранжа для задачи (61)–(63) имеют вид:

[2] Галеев Э.М. 2002. *Оптимизация: теория, примеры, задачи*: учебное пособие. Москва: Едиториал УРСС.

$$\lambda_j(t)\left[\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)x_{ij}(t) - B_j(t)\right] = 0\,, \qquad j=\overline{1,m}\,, \tag{66}$$

$$\lambda_j(t) \ge 0 \qquad j=\overline{1,m}\,. \tag{67}$$

Соотношения (62), (63), (65)–(67) представляют собой условия Куна-Таккера для задачи (61)–(63). Поскольку целевая функция (61) вогнута, указанные условия являются не только необходимыми, но и достаточными условиями оптимальности для решения рассматриваемой задачи.

Из равенств (65) следует положительность множителей Лагранжа $\lambda_j(t)$. Следовательно, в силу условий дополняющей нежесткости (66) ограничения (62) должны выполняться со знаком равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)x_{ij}(t) = B_j(t)\,, \qquad j=\overline{1,m}\,. \tag{68}$$

Выразив $x_{ij}(t)$ из уравнений (65), получим:

$$x_{ij}(t) = \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t)\lambda(t)}\,, \qquad i=\overline{1,n}\,,\; j=\overline{1,m}\,. \tag{69}$$

Подставив выражения (69) в равенство (68), будем иметь формулу для множителей Лагранжа:

$$\lambda_j(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}(t)}{B_j(t)}\,, \qquad j=\overline{1,m}\,. \tag{70}$$

Подставив выражение (70) в формулу (69), получим формулу для оптимальных решений задач (61)–(63):

$$x_{ij}(t) = w_{ij}(t)B_j(t)\,, \qquad i=\overline{1,n}\,,\; j=\overline{1,m}\,, \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}\,, \tag{71}$$

где

$$w_{ij}(t) := \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t)\sum_{l=1}^{n}\beta_{lj}(t)}\,, \qquad i=\overline{1,n}\,,\; j=\overline{1,m} \qquad t=\overline{T_1+1,T_2}\,. \tag{72}$$

Отметим, что формулы (71), (72) дают единственное оптимальное решение задачи максимизации межвременного интегрального показателя (17) для планового периода с T_1-го года по T_2-й год.

Замечание 13. В соответствии с формулой (71) $w_{ij}(t)$ – это доли суммарного значения *j*-го показателя по регионам в периоде *t*, и при этом они (в силу формулы (72)) не зависят от суммарного значения $B_j(t)$.

В случае использования в модели только одного показателя результативности жилищной политики и только одного социально-экономического показателя (т. е. когда $m=1$ и $s=1$) в соответствии с замечанием 8, нет необходимости в индексах *j* и *k*, и тогда формулы (60), (72) и (71) можно записать:

$$\beta_i(t) = b_i\gamma_i\sum_{\tau=t}^{T_1}\alpha_i(\tau)\left(1-\gamma_i\right)^{\tau-t}\,, \qquad i=\overline{1,n}\,,\; t=\overline{T_1,T_2}\,, \tag{73}$$

$$w_i(t) := \frac{\beta_i(t)}{c_i(t)\sum_{l=1}^{n}\beta_l(t)}\,, \qquad i=\overline{1,n}\,,\; t=\overline{T_1,T_2}\,, \tag{74}$$

$$x_i(t) = w_i(t)B(t), \qquad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}, \qquad t = \overline{T_1, T_2}. \qquad (75)$$

Подставив найденные значения b_i и γ_i и $\alpha_i(\tau)$, $i = \overline{1,n}$ из табл. 1 и 5 в формулу (73), получим значения коэффициентов $\beta_i(t)$ (табл. 6).

Таблица 6

Расчетные значения коэффициентов $\beta_i(t)$ *

Номер года	Регион Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$	$\beta_6(t)$	$\beta_7(t)$
1	0,0113	0,0116	0,0099	0,0159	0,0155	0,0131	0,0152
2	0,0102	0,0096	0,0084	0,0141	0,0140	0,0123	0,0127
3	0,0089	0,0074	0,0068	0,0119	0,0120	0,0113	0,0100
4	0,0070	0,0051	0,0049	0,0090	0,0094	0,0098	0,0071
5	0,0043	0,0027	0,0027	0,0052	0,0057	0,0069	0,0037

* Значения получены с помощью фактических данных в Республике Беларусь за 2000–2019 годы, с использованием условных значений эластичностей из табл. 2 и условного значения $\delta = 0,95$.

Источник. Авторская разработка.

В произведенных расчетах с использованием реальных данных рассматривается случай оперирования одним показателем результативности жилищной политики и одним социально-экономическим (т. е. когда $m = 1$ и $s = 1$), причем в качестве показателя результативности жилищной политики выступает годовой ввод в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, а в качестве социально-экономического показателя – годовое число родившихся по областям и г. Минску. Так как в данном случае в качестве $B(t)$ выступает плановый ввод в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, будем использовать значения $c_i(t) = 1$. Тогда ограничения (53) примут вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \le B(t), \qquad t = \overline{T_1, T_2}. \qquad (76)$$

Подставив в формулу (74) расчетные значения $\beta_i(t)$ из табл. 6, а также значения $c_i(t) = 1$ и $t = \overline{T_1, T_2}$ при $T_1 = 1$ и $T_2 = 5$, получим оптимальные (плановые) доли $w_i(t)$ для ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску для пятилетнего периода (табл. 7).

Таблица 7

Оптимальные доли $w_i(t)$ ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, %*

Номер года	Регионы Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
	$w_1(t)$	$w_2(t)$	$w_3(t)$	$w_4(t)$	$w_5(t)$	$w_6(t)$	$w_7(t)$
1	12,20	12,53	10,71	17,21	16,75	14,15	16,45
2	12,57	11,76	10,38	17,34	17,18	15,12	15,65
3	13,00	10,86	9,92	17,38	17,62	16,57	14,66
4	13,42	9,80	9,31	17,24	18,00	18,77	13,45
5	13,77	8,58	8,51	16,82	18,22	22,11	11,98

* Получено с помощью фактических данных в Республике Беларусь за 2000–2019 годы, а также с использованием условных значений эластичностей из табл. 2 и условного значения $\delta = 0,95$.

Источник. Авторская разработка.

Замечание 14. С использованием коэффициентов (23) и (24) (и при постоянных во времени коэффициентах (23)) формула (60) примет вид:

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s} b_{ijk}\tilde{\alpha}_{ik}\gamma_{ijk}\sum_{\tau=t}^{T_2}\varphi(\tau)\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{\tau-t}, \; i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}, \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \qquad (77)$$

В случае, когда краткосрочные эластичности замещения (38) постоянны, для коэффициента $\varphi(t)$ справедлива формула (42). С использованием указанной формулы (а также формулы для суммы геометрической прогрессии) получим:

$$\beta_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\delta}{1-\delta^{T_2-T_1+1}}\delta^{t-T_1}\sum\limits_{k=1}^{s} b_{ijk}\tilde{\alpha}_{ik}\gamma_{ijk}\dfrac{1-\left[\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)\right]^{T_2-t+1}}{1-\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)} & \text{при } \delta\neq 1, \\ \dfrac{1}{T_2-T_1+1}\sum\limits_{k=1}^{s} b_{ijk}\tilde{\alpha}_{ik}\left[1-\left(1-\gamma_{ijk}\right)^{T_2-t+1}\right] & \text{при } \delta=1, \end{cases} \qquad (78)$$

Введем упрощенные коэффициенты $\beta_{ij}(t)$ по формуле:

$$\tilde{\beta}_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s} b_{ijk}\tilde{\alpha}_{ik}\gamma_{ijk}\frac{1-\left[\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)\right]^{T_2-t+1}}{1-\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)}, \qquad i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}, \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \qquad (79)$$

Из соотношений (72), (78), (79) следует, что оптимальные доли $w_{ij}(t)$ можно выразить также с помощью упрощенных коэффициентов $\tilde{\beta}_{ij}(t)$:

$$w_{ij}(t) := \frac{\tilde{\beta}_{ij}(t)}{c_{ij}(t)\sum\limits_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_{lj}(t)}, \qquad i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m} \qquad t=\overline{T_1,T_2}. \qquad (80)$$

Методика определения оптимального распределения показателей результативности жилищной политики при бесконечном горизонте планирования

Заметим, что в силу того, что $\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)<1$, значение выражения $\left[\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)\right]^{T_2-t+1}$ стремится к нулю при $T_2\to\infty$:

$$\lim_{T_2\to\infty}\left[\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)\right]^{T_2-t+1} = 0 \qquad (81)$$

Обозначим через $\tilde{\beta}^{\infty}_{ij}(t)$ пределы коэффициентов $\tilde{\beta}_{ij}(t)$ при $T_2\to\infty$:

$$\tilde{\beta}^{\infty}_{ij}(t) := \lim_{T_2\to\infty}\tilde{\beta}_{ij}(t), \qquad i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}. \qquad (82)$$

Из соотношений (79), (81) следует, что коэффициенты $\tilde{\beta}^{\infty}_{ij}(t)$ не зависят от *t* и для них применима формула:

$$\tilde{\beta}^{\infty}_{ij} := \sum_{k=1}^{s}\frac{b_{ijk}\tilde{\alpha}_{ik}\gamma_{ijk}}{1-\delta\left(1-\gamma_{ijk}\right)}, \; i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}. \qquad (83)$$

Обозначим через $w^{\infty}_{ij}(t)$ пределы оптимальных долей $w_{ij}(t)$ при $T_2\to\infty$:

$$w^{\infty}_{ij}(t) := \lim_{T_2\to\infty} w_{ij}(t), \qquad i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}. \qquad (84)$$

По формуле (84) можно найти оптимальные доли при бесконечном горизонте планирования. Перейдя в равенстве (80) к пределу при $T_2 \to \infty$, получим следующие равенства (при постоянных во времени коэффициентах $c_{ij}(t)$):

$$w_{ij}^{\infty} := \frac{\tilde{\beta}_{ij}}{c_{ij}\sum_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_{lj}}, \qquad i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m}. \tag{85}$$

(Поскольку коэффициенты $\tilde{\beta}_{ij}^{\infty}$ не зависят от t, коэффициенты w_{ij}^{∞} также не зависят от t при постоянных во времени коэффициентах c_{ij})

В случае использования в модели только одного показателя результативности жилищной политики и только одного социально-экономического показателя (т. е. когда $m=1$ и $s=1$) в соответствии с замечанием 8 нет необходимости в индексах j и k, и тогда формулы (83) и (85) можно записать:

$$\tilde{\beta}_i^{\infty} := \frac{b_i\tilde{\alpha}_i\gamma_i}{1-\delta(1-\gamma_i)}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{86}$$

$$w_i^{\infty} := \frac{\tilde{\beta}_i}{c_i\sum_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_l}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{87}$$

Подставив найденные значения b_i и γ_i и $\tilde{\alpha}_i$, $i=\overline{1,n}$, из табл. 1 и 3, а также значение $\delta = 0,95$ в формулу (86), получим значения коэффициентов $\tilde{\beta}_i^{\infty}$ (табл. 8).

Таблица 8

Расчетные значения коэффициентов $\tilde{\beta}_i^{\infty}$ *

Показатель	Регионы Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
Коэффициенты $\tilde{\beta}_i^{\infty}$	0,0539	0,0844	0,0584	0,0804	0,0749	0,0595	0,0999

* Получены с помощью фактических данных в Республике Беларусь за 2000–2019 годы, а также с использованием условных значений эластичностей из табл. 2 и условного значения $\delta = 0,95$.

Источник. Авторская разработка.

Подставив значения $\tilde{\beta}_i^{\infty}$ из табл. 8, а также значения $c_i = 1$ в формулу (87), получим оптимальные (плановые) доли w_i^{∞} для ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску при бесконечном горизонте планирования (табл. 9).

Таблица 9

Оптимальные доли w_i^{∞} ввода в эксплуатацию жилых домов по областям и г. Минску при бесконечном горизонте планирования, %*

Показатель	Регионы Республики Беларусь						
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	г. Минск	Минская область	Могилевская область
Коэффициенты w_i^{∞}	10,54	16,50	11,42	15,73	14,64	11,63	19,54

* Получены с помощью фактических данных в Республике Беларусь за 2000–2019 годы, а также с использованием условных значений эластичностей из табл. 2 и условного значения $\delta = 0,95$.

* * *

Таким образом, предложенная методика позволяет улучшить прогнозирование и планирование распределения ресурсов по регионам, способствуя сбалансированному развитию жилищного сектора в различных регионах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

Валетко В.В. 2011. Реструктуризация экономики и экономический рост: эконометрический анализ влияния строительства жилья в 2006–2010 гг. *Труды БГТУ*. № 7. С. 21–24. [Valetko V.V. 2011. Economic Restructuring and Economic Growth: An Econometric Analysis of the Impact of Housing Construction in 2006–2010. *Trudy BGTU*. No 7. PP. 21–24. (In Russ.)]

Ерёменко М.М. 2018. Прогнозирование объемов инвестиций населения в основной капитал на строительство жилых домов в Республике Беларусь. *Жилищные стратегии*. Т. 5. № 3. С. 323–352. [Eremenko M.M. 2018. Forecasting of Volumes of the Population Investments into Fixed Capital into Resident Construction in the Republic of Belarus. *Zhilishchnye strategii*. Vol. 5. No 3. PP. 323–352. (In Russ.)] DOI:10.18334/zhs.5.3.39240

Игнашева Т.А. 2014. Прогнозирование объемов жилищного строительства в регионах. *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. Т. 20. С. 2116–2120. [Ignasheva T.A. 2014. Forecasting the volume of housing construction in the regions. *Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal «Kontsept»*. Vol. 20. PP. 2116–2120. (In Russ.)]

Копейкин А.Б., Рогожина Н.Н., Туманов А.А. 2007. *Финансирование жилищного строительства*. Москва: Фонд «Институт экономики города». [Kopeikin A.B., Rogozhina N.N., Tumanov A.A. 2007. *Housing Funding*. Moscow: Fond «Institut ekonomiki goroda». (In Russ.)]

Литвинович А.А., Аксень Э.М. 2023. Моделирование влияния объемов жилищного строительства на социально-экономические показатели с учетом запаздывания. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. Сборник 17. Минск: Научно-исследовательский институт Министерства экономики Республики Беларусь. С. 258–265. [Litvinovich A.V., Aksen E.M. 2023. Modeling the Housing Construction Volumes Impact on Socio-economic Indicators Taking into Account the Delay. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie*. Minsk: Minsk: Nauchno-issledovatel'skiy institut Ministerstva ekonomiki Respubliki Belarus'. Iss. 17. PP. 258–265. (In Russ.)]

Олейник Е.Б., **Захарова А.П.** 2012. Анализ и прогнозирование объема инвестиций в основной капитал. *Экономика региона*. № 1. С. 137–149. [Oleynik E.B., Zakharova A.P. 2012. Analysis and Prediction of Amount of Investments into Fixed CapitaL. *Ekonomika regiona*. No 1. PP. 137–149. (In Russ.)] DOI: 10.17059/2012-1-12

Севек В.К., Монгуш О.Н., Чульдум А.Э., Салчак А.А. 2015. Прогнозирование объемов жилищного строительства г. Кызыл на основе корреляционно-регрессионного анализа. *Вестник Забайкальского государственного университета*. № 10. С. 119–129. [Sevek V.K., Mongush O.N., Chuldum A.E., Salchak A.A. 2015. Forecasting of Housing Construction in Kyzyl-based Regression Analysis. *Vestnik Zabaykalskogo gosudarstvennogo universiteta*. No 10. PP. 119–129. (In Russ.)]

Стерник Г.М. 2012. Методика среднесрочного прогнозирования развития рынка жилья города (региона). *Имущественные отношения в Российской Федерации*. № 9. С. 52–65. [Sternik G.M. 2012. Methodology Medium-Term Forecasting Housing Market City (Region). *Imushchestvennye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii*. No 9. PP. 52–65. (In Russ.)]

Стерник Г.М., Стерник С.Г. 2018. Методика прогнозирования объемов ввода на локальном рынке строительства и продажи жилья. *Жилищные стратегии*. Т. 5. № 2. [Sternik G.M., Sternik S.G. 2018. Methodology for Forecasting Commissioning Volumes in the Local Housing Construction and Sales Market. *Zhilishchnye strategii*. Vol. 5. No 2. (In Russ.)] DOI:10.18334/zhs.5.2.39142

Browne L.E. 2000. National and Regional Housing Patterns. *New England Economic Review*. Iss. Jul. PP. 31–57.

Hayashi F., Ito T., Slemrod J. 1988. Housing Finance Imperfections, Taxation, and Private Saving: A Comparative Simulation Analysis of the United States and Japan. *Journal of the Japanese and International Economies*. Vol. 2. Iss. 3. PP. 215–238. DOI: 10.1016/0889-1583(88)90011-1

Osili U. 2005. Migrants and Housing Investments: Theory and Evidence from Nigeria. *Economic Development and Cultural Change*. Vol. 52. No 4. P. 821–849.

METHODOLOGY FOR MODELING THE OPTIMAL ALLOCATION OF HOUSING POLICY RESULTIVENESS INDICATORS WITH ALLOWANCE FOR THE DELAY

Anastasiya Litvinovich[1] (https://orcid.org/0009-0003-4725-2344),
Marina Eremenko[2] (https://orcid.org/0000-0002-9183-6393),
Ernest Aksen[3] (https://orcid.org/0000-0001-6627-8521)

[1] Belarusian State University (Minsk, Belarus),
[2] Republican Unitary Enterprise Institute of Housing – NIPTIS named after Atayev S.S. (Minsk, Belarus),
[3] Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus).

Corresponding author: Anastasiya Litvinovich (anastasiya.litvinovich@gmail.com).

ABSTRACT. The article describes the authors' method of constructing an intertemporal integral socio-economic indicator using replacement elasticities. It formulates and investigates the dynamic problem of maximizing this indicator, taking into account constraints on housing policy effectiveness indicators. The authors propose a method for assessing the impact of the dynamics of housing policy result indicators on the value of an intertemporal integral socio-economic indicator, taking into account the delay. A study has been conducted for the case with an infinite planning horizon, and analytical formulas were obtained for calculating the shares of housing policy effectiveness indicators across regions.

KEYWORDS: housing policy, dynamics, integral indicator, optimization, modeling.

JEL-code: R31, C61.

DOI: 10.46782/1818-4510-2024-2-81-97

Received 18.03.2024

In citation: Litvinovich A., Eremenko M., Aksen E. 2024. Methodology for Modeling the Optimal Allocation of Housing Policy Resultiveness Indicators with Allowance for the Delay. *Belorusskiy ekonomicheskiy zhurnal*. No 2. PP. 81–97. DOI: 10.46782/1818-4510-2024-2-81-97 (In Russ.)

■ ■ ■